

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и теоретической механики

Рабочая программа дисциплины

МАТЕМАТИКА

Основная профессиональная образовательная программа
высшего образования по направлению подготовки

05.03.06 «Экология и природопользование»

Направленность (профиль):

**Экологические проблемы больших городов, промышленных зон и
полярных областей**

Уровень:

Бакалавриат

Форма обучения

Очная/заочная

Согласовано
Руководитель ОПОП



Алексеев Д.К.

Председатель УМС
 И.И. Палкин

Рекомендована решением
Учебно-методического совета
"19" мая 2021 г., протокол №8

Рассмотрена и утверждена на заседании кафедры
"05" мая 2021 г., протокол №10
Зав. кафедрой  Зайцева И.В.

Автор-разработчик:
 Беликова Г.И.

Санкт-Петербург, 2021

1. Цель и задачи освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины – приобретение фундаментальных знаний в следующих областях высшей математики: алгебра, аналитическая геометрия, математический анализ функций одного и нескольких переменных, теория числовых и функциональных рядов, теория дифференциальных уравнений, гармонический анализ.

Задачи:

- владение основными терминами и понятиями высшей математики;
- формирование умения строить и исследовать математические модели различных экологических процессов;
- приобретение практических навыков решения классических задач в рамках изученных разделов высшей математики.

2. Место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы

Дисциплина «Математика» для направления подготовки 05.03.06 –экология и природопользование относится к дисциплинам основного блока 1 дисциплины (модуля).

Дисциплина изучается: студентами в течение первых трёх семестров.

Для освоения данной дисциплины, студенты должны знать школьный курс математики.

Дисциплина «Математика» является важнейшим инструментом для освоения дисциплин: «Механика», «Общая физика», «Метеорология», «Океанология», «Гидрология», «Обработка рядов наблюдений» и др.

3. Перечень планируемых результатов обучения

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование компетенций: ОПК-1

Общепрофессиональные компетенции

Таблица 1

Код и наименование профессиональной компетенции	Код и наименование индикатора достижения профессиональной компетенции	Результаты обучения
ОПК-1Способен применять базовые математические знания в области профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Применяет математические знания для решения задач в профессиональной деятельности. ОПК-1.2. Выявляет взаимосвязь математических моделей с соответствующими экологическими процессами.	<u>Знать:</u> – знать основные понятия высшей математики и различные математические инструменты, с помощью которых можно изучать экологические процессы. <u>Уметь:</u> – использовать основные результаты, полученные в высшей математике для изучения экологических процессов, <u>Владеть:</u> – методами вычислительной математики для проведения корректных расчётов при обработке и анализе рядов наблюдений..

4. Структура и содержание дисциплины

4.1. Объем дисциплины для очной формы обучения

Объем дисциплины составляет 9 зачетных единиц, 324 академических часа.

Таблица 2

Объем дисциплины по видам учебных занятий в академических часах

Объем дисциплины	Всего часов		
	Очная форма обучения	-----	Заочная форма обучения
Объем дисциплины	324		324
Контактная работа обучающихся с преподавателем (по видам аудиторных учебных занятий) – всего:	126		36
в том числе:	-		-
лекции	42		16
занятия семинарского типа:	-		-
практические занятия	84		20
Самостоятельная работа (далее – СРС) – всего:	198		288
в том числе:	-		-
подготовка к экзамену	108		96
Вид промежуточной аттестации	экзамен		экзамен

4.2. Структура дисциплины

Таблица 3

Структура дисциплины для очной формы обучения

№	Раздел / тема дисциплины	Семестр	Виды учебной работы, в т.ч. самостоятельная работа студентов, час.			Формы текущего контроля успеваемости	Формируемые компетенции	Индикаторы достижения компетенций
			Лекции	Практические занятия	СРС			
1	Определители.	1	--	2	6	Опрос теории, практическая работа.	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
2	Векторная алгебра.	1	2	4	6	Опрос теории, практическая работа.	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
3	Векторные пространства.		---	2	4	Итоговый опрос теории, практическая работа.	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
4	Аналитическая геометрия на плоскости.	1	2	4	8	Опрос теории, практическая работа.	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
5	Аналитическая геометрия в пространстве.	1	2	4	8	Итоговый опрос теории, практическая работа.	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
6	Алгебра комплексных чисел.	1	--	2	6	Опрос теории, практическая работа.	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
7	Многочлены и дробно рациональные выражения.	1	2	2	8	Итоговый опрос теории, практическая работа.	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
8	Матричная алгебра.	1	2	2	6	Опрос теории, практическая работа.	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
9	Системы линейных уравнений.	1	4	4	10	Итоговый опрос теории, практическая работа.	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
10	Задача на собственные значения.	1	--	2	4	Опрос теории, практическая работа.	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
	ИТОГО	-	14	28	66	-	-	-

11	Функции, классификация и свойства.	2	--	2	2	Опрос теории, практическая работа		
12	Теория пределов и техника вычисления. Непрерывность.	2	2	4	6	Итоговый опрос теории, практическая работа.	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
13	Производная, дифференциал, свойства и техника дифференцирования.	2	2	4	6	Опрос теории, практическая работа.	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
14	Полное исследование функций с помощью пределов и производных	2	2	4	4	Итоговый опрос с теории, практическая работа	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
15	Неопределённый интеграл, свойства и техника интегрирования.	2	2	4	10	Опрос теории, практическая работа.	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
16	Определённый интеграл, свойства и вычисление.	2	2	2	8	Итоговый опрос теории, практическая работа	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
17	Геометрическое приложение определённого интеграла.	2	--	2	6	Опрос теории, практическая работа	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
18	Базовые понятия теории дифференциальных уравнений, решение уравнений 1-го порядка.	2	2	2	8	Опрос теории, практическая работа.	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
19	Дифференциальные уравнения 2-го порядка.	2	2	2	8	Опрос теории, практическая работа.	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
20	Решение задачи Коши.	2	--	2	8	Итоговый опрос теории, практическая работа.	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
	ИТОГО	-	14	28	66	-	-	-

21	Числовые ряды.	3	2	2	6	Опрос теории, работа у доски	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
22	Функциональные ряды и их Приложения.	3	4	6	6	Итоговый опрос теории, практическая работа	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
23	Базовые понятия теории функций 2 и 3 переменных. Частные производные и дифференциалы.	3	-- -	2	4	Опрос теории, практическая работа	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
24	Пример приложения ряда Фурье и частных производных. Решение уравнения теплопроводности.	3	-- -	2	8	Итоговый опрос теории, практическая работа	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
25	Элементы теории поля.	3	--	2	6	Опрос теории, практическая работа	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
26	Экстремумы функций двух переменных.	3	2	4		Итоговый опрос теории, практическая работа	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
27	Криволинейные интегралы.	3	2	4	8	Итоговый опрос теории, практическая работа	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
28	Двойные интегралы..	3	2	4	6	Опрос теории, практическая работа	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
29	Тройные интегралы.	3	2	2	10	Опрос теории, практическая работа	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
	ИТОГО	-	14	28	66	-	-	-

Структура дисциплины для заочной формы обучения

Таблица 4

№	Раздел / тема дисциплины	Год учёбы	Виды учебной работы, в т.ч. самостоятельная работа студентов, час.			Формы текущего контроля успеваемости	Формируемые компетенции	Индикаторы достижения компетенций
			Лекции	Практические занятия	СРС			
1	Определители	1	--	---	8	-----	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
2	Векторная алгебра.	1	--	---	8	-----	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
3	Векторные пространства.	1	---	---	8	-----	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
4	Аналитическая геометрия на плоскости.	1	--	---	8	-----	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
5	Аналитическая геометрия в пространстве.	1	--	---	8	-----	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
6	Алгебра комплексных чисел.	1	--	---	8	-----	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
7	Многочлены и дробно-рациональные выражения.	1	2	2	8	практическая работа с решением примеров	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
8	Матричная алгебра.	1	--	---	8	-----	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
9	Системы линейных уравнений.	1	2	2	10	практическая работа с решением примеров	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
10	Задача на собственные значения.	1	--	--	8	-----	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2

11	Функции, классификация и свойства.	2	--	--	2			
12	Теория пределов и техника вычисления. Непрерывность.	2	2	2	10	практическая работа с решением примеров	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
13	Производная, дифференциал, свойства и техника дифференцирования	1	--	2	10	практическая работа с решением примеров	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
14	Полное исследование функций с помощью пределов и производных.	1	--	---	10	-----	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
15	Неопределённый интеграл, свойства и техника интегрирования.	1	2	2	10	практическая работа с решением примеров	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
16	Определённый интеграл, свойства и вычисление.	1		2	8	практическая работа с решением примеров	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
17	Геометрическое приложение определённого интеграла.	1	--	--	4	-----	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
	ИТОГО		08	12	144			
18	Базовые понятия теории дифференциальных уравнений, решение уравнений 1-го порядка.	2	--	--	10	-----	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
19	Дифференциальные уравнения 2-го порядка.	2	2	2	12	практическая работа с решением примеров	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
20	Решение задачи Коши.	2	--	---	10	-----	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
21	Числовые ряды	2	--	--	12	-----	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
22	Функциональные ряды и их приложения.	2	2	2	18	практическая работа с решением примеров	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2

23	Базовые понятия теории функций 2 и 3 переменных. Частные производные и дифференциалы.	2	--	---	12	-----	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
24	Пример приложения ряда Фурье и частных производных. Решение уравнения теплопроводности.	2	--	--	12	-----	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
25	Элементы теории поля.	2	--	--	10	-----	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
26	Экстремумы функций двух переменных.	2	2	2	12	практическая работа с решением примеров	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
27	Криволинейные интегралы.	2	--	--	12	-----	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
28	Двойные интегралы.	2	2	2	12	практическая работа с решением примеров	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
29	Тройные интегралы.	2	--	--	12	-----	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2
	ИТОГО	-	08	08	144		-	-

4.3. Содержание дисциплины

4.3.1. Определители

Геометрическая постановка. Алгебраическая постановка. Свойства определителей второго порядка. Определители третьего порядка. Определители n -го порядка и способы их вычисления. Теорема Лапласа.

4.3.2. Векторная алгебра

Базовые понятия. Линейные операции. Нелинейные операции: скалярное, векторное и смешанное произведения. Коллинеарность и компланарность векторов. Векторный базис. Линейные и нелинейные операции в координатной форме.

4.3.3. Линейные векторные пространства

Базовые понятия. Линейные операции. Скалярное произведение. Евклидовы векторные пространства. Норма вектора. Неравенство Коши – Буняковского. Угол между векторами. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Базис. Ортогональные системы векторов и ортогональный базис. Построение ортогонального и ортонормированного базиса в n - мерном векторном пространстве.

4.3.4. Аналитическая геометрия на плоскости

Декартовы системы координат на плоскости. Преобразование системы координат. Полярная система координат. Связь полярной системы координат с декартовой. Построение уравнений прямой: уравнение прямой по двум заданным

точкам, параметрические уравнения прямой, уравнение прямой с угловым коэффициентом, уравнение прямой в отрезках, уравнение прямой по заданной точке и вектору, общее уравнение прямой, нормальное уравнение прямой.

Кривые второго порядка. Вывод канонических уравнений кривых 2-го порядка: окружности, эллипса, гиперболы и параболы. Приведение уравнений 2-ой степени к каноническому виду. Частные случаи. Общий случай. Инварианты уравнения 2-ой степени.

4.3.5. Аналитическая геометрия в пространстве

Вывод уравнений плоскости: уравнение плоскости по данным двум векторам и точке, уравнение плоскости по трём точкам, уравнение плоскости в отрезках, общее уравнение плоскости, нормальное уравнение плоскости. Неполные уравнения плоскости

Вывод уравнений прямой по двум заданным точкам, по заданной точке и вектору. Вывод параметрических уравнений прямой и общего уравнения прямой. Поверхности второго порядка. Цилиндрические поверхности.

4.3.6. Алгебра комплексных чисел

Алгебраическая форма и арифметические действия. Сопряжённые числа и их свойства. Графический образ. Тригонометрическая форма. Арифметические действия в тригонометрической форме. Возведение в степень (формула Муавра) и извлечение корня в тригонометрической форме. Формула Эйлера, показательная форма, возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа в показательной форме. Графический образ корней.

4.3.7. Многочлены и рациональные дроби

Базовые понятия. Операции над многочленами: сложение, вычитание, умножение. Деление без остатка и деление с остатком. Корни многочлена. Основная теорема алгебры (теорема Гаусса). Следствия из основной теоремы: число корней в множестве комплексных чисел. Теорема Безу. Обобщённая теорема Виета. Разложение полиномов на множители в множестве комплексных чисел и в множестве действительных чисел. Знаменитые полиномы: полином Лагранжа, полином Ньютона.

Дробно рациональные выражения и их классификация: неправильные дроби, правильные дроби. Простейшие дроби и их классификация. Разложение правильных дробей на простейшие методом неопределённых коэффициентов. Представление неправильной дроби в виде суммы полинома и правильной дроби.

4.3.8. Матричная алгебра

Базовые понятия. Линейные операции над матрицами и свойства этих операций. Умножение матриц и свойства этой операции. Понятие линейной независимости строки и столбцов. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы. Эквивалентные матрицы и их свойства. Квадратные матрицы. Классификация квадратных матриц. Преобразование базисов с помощью матриц.

4.3.9. Системы линейных уравнений

Неоднородные системы. Базовые понятия. Теорема Кронекера-Капелли и следствия из неё. Фундаментальная система решений. Основные методы решения: метод Крамера, матричный метод, метод Гаусса (метод исключения), метод Гаусса с выбором главного элемента, метод трёхдиагональной прогонки. Решение систем с разными свободными столбцами. Решение однородных систем.

4.3.10. Задача на собственные значения

Постановка задачи. Собственные числа и собственные векторы. Частичная проблема собственных чисел и полная проблема. Свойства собственных векторов. Собственные числа диагональных и треугольных матриц. Алгоритм решения в простейших случаях (все собственные числа – разные действительные числа).

4.3.11. Функции, классификация и свойства

Определение функции Способы задания функции. Виды аналитического задания функции: явный, неявный, параметрический. Основные свойства: область определения, чётность, нечётность, монотонность, корни, периодичность.

4.3.12. Теория пределов и техника вычисления. Непрерывность

Основные понятия и определения: окрестность точки, граничные и внутренние точки, предельные точки. Определение предела функции в точке (по Коши). Понятие бесконечного предела.

Свойства предела. Единственность. Аддитивность. Однородность. Предел произведения. Предел отношения. Переход к пределу в неравенствах (свойство монотонности).

Теорема о сжатой функции. Предел композиции функций.

Техника вычисления пределов. Виды неопределённостей и их раскрытие. Определение бесконечно малых и их сравнение. Свойства бесконечно малых. Список основных эквивалентных бесконечно малых. Основное свойство эквивалентных бесконечно малых.

Определение бесконечно больших, их сравнение и свойства. Основное свойство эквивалентных бесконечно больших. Раскрытие неопределённостей с помощью эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших. Первый и второй замечательные пределы.

Непрерывность. Определение приращения аргумента и приращения функции.

Односторонние пределы в точке: левосторонний и правосторонний. Три определения непрерывности функции в точке и их взаимосвязь. Операции над непрерывными функциями в точке: сложение, умножение, деление, композиция. Непрерывность функции в области. Односторонняя непрерывность.

Основные свойства функций непрерывных на отрезке. Две теоремы Вейерштрасса, теорема Коши, Теорема Больцано-Коши. Теорема о непрерывности обратной функции. Непрерывность элементарных функций. Равномерная непрерывность в интервале. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функций на отрезке.

Точки разрыва и их классификация. Разрывы первого рода, устранимые разрывы. Разрывы второго рода. Привести примеры графических образов разрывов первого и второго рода.

4.3.13. Производная, дифференциал, свойства и техника дифференцирования

Определение производной. Дифференцируемые функции, непрерывно дифференцируемые функции, гладкие функции. Вывод производных простейших элементарных функций. Основные свойства производных: аддитивность, однородность. Дифференцирование произведения и отношения функций. Дифференцирование композиции функций, обратных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование (два способа). Дифференциальные теоремы о среднем: Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя для нахождения предела отношения функций. Физический и геометрический смысл производной.

Дифференциал. Определение дифференциала функции и его геометрический смысл. Дифференциал аргумента. Основные свойства дифференциала: однородность, аддитивность. Дифференциал произведения. Инвариантность формы первого дифференциала. Выражение производной через дифференциалы.

4.3.14. Полное исследование функций с помощью пределов и производных

Асимптоты. Классификация асимптот. Определение наклонной асимптоты. Необходимое условие существования наклонных асимптот. Вычисление параметров наклонной асимптоты. Горизонтальные асимптоты. Вертикальные асимптоты. Необходимое условие существования вертикальных асимптот.

Нахождение интервалов монотонности функции с помощью производных. Определение точек экстремума. Стационарные точки дифференцируемых функций. Два достаточных условия существования точек максимума или минимума.

Наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции. Теорема Вейерштрасса. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой функции. Выпуклость графика функции вверх и вниз. Точки перегиба. Определение вида выпуклости и нахождение точек перегиба с помощью второй производной.

4.3.15. Неопределённый интеграл, свойства и техника интегрирования.

Основные понятия и определения: подынтегральная функция, подынтегральное выражение, переменная интегрирования. Табличные интегралы. Связь между дифференцированием и интегрированием. Свойства неопределённых интегралов: однородность, аддитивность.

Способы интегрирования. Метод разложения, метод подстановки, интегрирование по частям (с выводом формулы), рекурсивное интегрирование. Интегрирование дробно-рациональных функций. Интегрирование некоторых тригонометрических функций. Тригонометрическая подстановка и универсальная тригонометрическая подстановка.

4.3.16. Определённый интеграл, свойства и способы вычисления

Построение интегральной суммы и определение определённого интеграла. Условия интегрируемости. Свойства: однородность, аддитивность по подынтегральной функции, аддитивность по области интегрирования, монотонность, теорема о среднем, сохранение знака, связь пределов интегрирования. Оценка значений интеграла.

Вычисление. Формула Ньютона-Лейбница. Метод подстановки, формула интегрирования по частям. Интегрирование чётных и нечётных функций по симметричному интервалу. Несобственные интегралы первого и второго вида, их вычисление с помощью пределов

Ортогональные системы функций. Определение. Примеры тригонометрических систем ортогональных функций на отрезке $-l, l : \sin \frac{k\pi x}{l}, \cos \frac{k\pi x}{l} \quad k=0$ и на отрезке $0, l : \sin \frac{k\pi x}{l} \quad k=1, \cos \frac{k\pi x}{l} \quad k=0$.

4.3.17. Геометрическое приложение определённого интеграла

Вычисление площади плоских фигур. Вывод формулы вычисления длины плоской кривой. Вывод формулы, с помощью которой вычисляется объём тела вращения.

4.3.18. Базовые понятия теории дифференциальных уравнений и способы решения простейших уравнений

Классификация уравнений: порядок, линейность, нелинейность, однородность, неоднородность, с постоянными коэффициентами и с переменными коэффициентами.

Классификация решений: общее решение, общий интеграл, частное решение, особое решение.

Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения с разделёнными переменными и уравнения с разделяющимися переменными. Решение линейного дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами методом Я.Бернулли. Решение уравнения И. Бернулли – нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами.

Простейшие дифференциальные уравнения второго порядка. Понятие линейной независимости двух функций. Построение общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами методом Эйлера. Связь количества произвольных постоянных с порядком уравнения.

Метод Эйлера. Выбор аналитического вида решения. Построение характеристического уравнения и нахождение его корней. Построение общего решения в зависимости от вида корней характеристического уравнения: разные действительные корни, корень одной кратности 2, комплексные корни, мнимые корни.

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами методом Лагранжа (методом вариации произвольных постоянных).

4.3.19. Решение задачи Коши

Постановка задачи. Связь порядка уравнения с количеством начальных условий.

Решение задачи Коши для уравнений первого порядка и для уравнений второго порядка.

4.3.20. Числовые ряды

Введение понятий: числовой ряд, общий член ряда, частичная сумма, остаток ряда, сходимость ряда, расходимость ряда. Необходимое условие сходимости ряда и достаточное условие расходимости ряда. Два необходимых и достаточных условия сходимости числового ряда. Линейные операции над сходящимися рядами: умножение ряда на число и сложение рядов.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными

членами: первый признак сравнения, второй признак сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши. Исследование на сходимость гармонического ряда и обобщённых гармонических рядов с помощью интегрального признака Коши. Исследование на сходимость геометрических рядов (рядов геометрической прогрессии).

Знакопеременные числовые ряды. Знакопеременяющиеся ряды. Теорема Лейбница и ряды Лейбница. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

4.3.21. Функциональные ряды и их приложение.

Область сходимости ряда. Равномерная сходимость. Свойства равномерно сходящихся рядов: непрерывность суммы, интегрирование и дифференцирование рядов.

Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Вывод формулы для нахождения радиуса сходимости с помощью признака Даламбера или интегрального признака Коши. Равномерная сходимость.

Ряд Тейлора. Разложение бесконечно дифференцируемой функции в ряд Тейлора. Условие сходимости ряда Тейлора. Единственность разложения функции в ряд Тейлора. Разложение простейших элементарных функций в ряд Тейлора. Ряд Маклорена. Вывод формулы Эйлера с помощью рядов Маклорена. Многочлены Тейлора и Маклорена. Приближённые вычисления значений функций, производных и интегралов с помощью многочленов Тейлора и Маклорена.

Тригонометрический ряд Фурье. Разложение функции по бесконечному ортогональному тригонометрическому базису. Построение коэффициентов Фурье. Сходимость в среднем. Тригонометрический ряд для чётных и нечётных функций.

4.3.22. Базовые понятия для функций нескольких переменных

Построение области определения для функции двух переменных. Понятие предела функции в точке плоскости. Понятие непрерывности. Геометрический образ функции двух переменных.

Частные производные и дифференциалы. Определение частных производных первого и второго порядков. Условие равенства вторых смешанных производных для функции двух переменных. Частные производные и частные дифференциалы, полный дифференциал. Дифференциал второго порядка. Производная композиции функций. Дифференцирование неявно заданных функций. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.

4.3.23. Пример приложения ряда Фурье и частных производных.

Решение уравнения теплопроводности

Рассматривается одномерное уравнение теплопроводности с заданными начальными условиями и с нулевыми краевыми условиями первого рода. Решение методом Фурье. Он состоит из трёх частей. 1-я часть – разделение переменных, 2-я часть – задача Штурма-Лиувилля. 3- часть – представление решения в виде тригонометрического ряда Фурье.

4.3.24. Элементы теории поля

Скалярное поле и векторное поле. Определение производной по направлению. Определения дифференциальных операций первого порядка. Градиент и его основные свойства. Связь градиента и производной по направлению. Дивергенция (расходимость) векторного поля. Ротор (вихрь) векторного поля. Дифференциальные операции второго порядка: дивергенция от градиента, ротор от градиента, дивергенция от ротора.

4.3.25. Экстремумы функций двух переменных

Необходимые условия экстремума. Многочлен Тейлора для функции двух переменных. Достаточные условия экстремума. Нахождение наибольших и наименьших значений функций двух переменных. Постановка задачи на нахождение условных экстремумов. Решение задач на условный экстремум методом Лагранжа. Задача на условный экстремум для линейных функций (простейший случай симплекс метода).

4.3.26. Криволинейные интегралы

Построение криволинейного интеграла первого рода, его свойства. Вычисление интеграла в зависимости от аналитического задания пути интегрирования. Определение криволинейного интеграла второго рода, его свойства и способы вычисления. Интеграл 2-го рода по замкнутому пути. Условие независимости интеграла 2-го рода от вида пути. Выбор пути интегрирования, если подынтегральное выражение является полным дифференциалом и вычисление такого интеграла. Нахождение функции по полному дифференциалу. Решение уравнения в полных дифференциалах.

4.3.27. Двойные интегралы

Построение двойного интеграла как предела интегральных сумм. Свойства интеграла по площади. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат. Построение якобиана (определителя Якоби). Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат. Вычисление интеграла Пуассона с помощью двойного интеграла в полярной системе координат. Применение двойного интеграла для вычисления площадей и объёмов.

4.3.28. Тройные интегралы

Построение тройного интеграла как предела интегральных сумм. Свойства интеграла по объёму. Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат. Построение якобиана (определителя Якоби) для цилиндрической системы координат. Вычисление тройного интеграла в цилиндрической системе координат. Сферическая система координат и соответствующий якобиан. Применение тройного интеграла для вычисления объёмов.

4.4.

Содержание занятий семинарского типа

Содержание практических занятий для очной формы обучения

Таблица 5

№ темы дисциплины	Тематика практических занятий	Всего часов	С Е М Е С Т Р	В том числе часов практических занятий
1	Способы вычисления определителей.	2	1	0
2	Решение задач по векторной алгебре.	4	1	0
3	Знакомство с n -мерными векторами и решение простейших примеров.	2	1	0
4	Решение задач по аналитической геометрии на плоскости.	4	1	0
5	Решение задач по аналитической геометрии в пространстве.	4	1	0
6	Решение примеров на построение областей в комплексной плоскости. Выполнения операций с комплексными числами.	2	1	0
7	Разложение правильных дробей на простейшие методом неопределённых коэффициентов. Деление многочлена на многочлен.	2	1	0
8	Решение примеров на приведение матриц к трапецевидному или треугольному виду. Вычисление ранга матрицы. Построение обратной матрицы двумя способами.	2	1	0
9	Решение линейных неоднородных и однородных систем различными методами: методом Крамера, Гаусса, матричным методом.	4	1	0
10	Решение простейших примеров на собственные числа и векторы.	2	1	0
Σ	-----	28	1	----
11	Примеры на основные свойства функций: область определения, чётность, нечётность, монотонность, корни, периодичность.	2	2	0
12	Примеры на раскрытие неопределённостей с помощью бесконечно малых и бесконечно больших. Примеры на определение непрерывности или разрыва в точке с помощью односторонних пределов.	4	2	0
13	Решение примеров на технику дифференцирования функций различного вида. Нахождение пределов с помощью правила Лопиталя.	4	2	0
14	Нахождение вертикальных и наклонных асимптот, интервалов монотонности, экстремумов, точек перегибов, областей выпуклости вверх и вниз. Решение примеров на полное исследование функций с построением их графиков.	4	2	0
15	Освоение основных способов интегрирования	4	2	0

16	Техника вычисления определённых интегралов, несобственных интегралов и интегралов по симметричной области от чётных и нечётных функций.	2	2	0
17	Вычисление площадей, длин дуг, объёмов тел вращения.	2	2	0
18	Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка с разделёнными и разделяющимися переменными. Решение уравнения 1-го порядка методом Я. Бернулли. Решение нелинейного уравнения 1-го порядка (уравнение И. Бернулли).	2	2	0
19	Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Эйлера.	2	2	0
20	Решение дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядка с начальными условиями.	2	2	0
Σ	-----	28	2	----- --
21	Исследование числовых рядов с положительными членами на сходимость с помощью различных достаточных признаков сходимости. Исследование знакопередающихся числовых рядов на абсолютную и относительную сходимость.	2	3	0
22	Нахождение интервалов и радиусов сходимости степенных рядов. Построение рядов Маклорена для простейших элементарных функций. Вывод формулы Эйлера. Вывод разностной аппроксимации 1-й и 2-й производных с помощью многочлена Тейлора. Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье.	6	3	0
23	Техника дифференцирования функций нескольких переменных. Построение частных и полных дифференциалов.	2	3	0
24	Решение однородного одномерного уравнения теплопроводности методом Фурье.	2	3	
25	Упражнения на производные по направлению, градиенты, дивергенции, роторов и дифференциальные операторы второго порядка в теории поля.	2	3	0
26	Решение задач на поиск точек минимума и максимума. Решение задач на условный экстремум. Поиск наибольших и наименьших значений в замкнутой области. Разбор простейших случаев симплекс метода.	4	3	0
27	Вычисление интегралов 1-го и 2-го рода по пути. Проверка условия независимости интеграла от вида пути. Вычисление интегралов 2-го рода от полного дифференциала. Восстановление функции по полному дифференциалу. Решение уравнений в	4	3	0

	полных дифференциалах.			
28	Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат. Вычисление интеграла Пуассона с помощью двойного интеграла в полярной системе координат. Применение двойного интеграла для вычисления площадей и объёмов.	4	3	0
29	Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат. Построение якобиана (определителя Якоби) для цилиндрической системы координат. Вычисление тройного интеграла в цилиндрической системе координат... Применение тройного интеграла для вычисления объёмов.	2	3	0
Σ	-----	28	3	----

Содержание практических занятий для заочной формы обучения

Таблица 6

№ темы дисциплины	Тематика практических занятий	Всего часов	Год учёбы	В том числе часов практических занятий
1	Разложение правильных дробей на простейшие методом неопределённых коэффициентов.	2	1	0
2	Решение линейных неоднородных и однородных систем различными методами: методом Крамера, Гаусса, матричным методом.	2	1	0
3	Примеры на раскрытие неопределённостей с помощью бесконечно малых и бесконечно больших. Примеры на определение непрерывности или разрыва в точке с помощью односторонних пределов.	2	1	0
4	Решение примеров на технику дифференцирования функций различного вида. Нахождение пределов с помощью правила Лопиталья.	2	1	0
5	Освоение основных способов интегрирования	2	1	0
6	Техника вычисления определённых интегралов, несобственных интегралов и интегралов по симметричной области от чётных и нечётных функций.	2	1	0
Σ	-----	12	1	0
1	Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка с разделёнными и разделяющимися переменными. Решение уравнения 1-го порядка методом Я. Бернулли. Решение	2	2	0

	нелинейного уравнения 1-го порядка (уравнение И. Бернулли).			
2	Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Эйлера.	2	2	0
3	Решение дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядка с начальными условиями.	2	2	0
4	Техника вычисления двойных интегралов.	2	2	0
Σ	-----	08	2	----- ---

5. Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://window.edu.ru/>
2. Moodle
3. Все лекции и домашние задания систематически выкладываются в Cloud.rshu.ru

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

Учет успеваемости каждого обучающегося по дисциплине осуществляется по 100-балльной шкале. Максимальное количество баллов по дисциплине за один семестр – 100:

- максимальное количество баллов за выполнение всех видов текущего контроля – 60,
- максимальное количество баллов за посещение лекционных занятий – 10
- максимальное количество баллов за прохождение промежуточной аттестации – 30
- максимальное количество дополнительных баллов – 15.

6.1. Текущий контроль

Итоговый опрос, методика выполнения и критерии оценивания текущего контроля по разделам дисциплины представлены в Фонде оценочных средств по данной дисциплине.

6.2. Промежуточная аттестация

Форма промежуточной аттестации по дисциплине – экзамен

Форма проведения экзамена: письменно по билетам. В билете два теоретических вопроса и одна задача.

Перечень вопросов для подготовки к экзамену за первый семестр.

1. Определители N-го порядка. Способы вычисления. Свойства. Приведение определителя к треугольному виду методом Гаусса.
2. Векторная алгебра. Определение вектора. Равенство векторов. Коллинеарность и компланарность векторов. Нулевой вектор. Единичный вектор. Линейные операции с векторами и свойства этих операций. Скалярное, векторное и смешанное умножение векторов и свойства этих операций. Базисные векторы в 2-х мерном и трёхмерном пространствах.
Векторы в координатной форме. Координаты единичного вектора (направляющие косинусы). Линейные операции векторов в координатной форме. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов в координатной форме.
Условие ортогональности, коллинеарности и компланарности в координатной форме. Вычисление косинуса угла между векторами через координаты векторов.

3. Линейные векторные N- мерные пространства. Определение N- мерного вектора. Линейные операции с векторами. Скалярное умножение векторов. Норма вектора. Неравенство Коши-Буняковского. Вычисление косинуса угла между векторами. Линейная независимость векторов. Базис в N- мерном векторном пространстве. Связь между линейной независимостью и ортогональностью векторов. Ортогональный и ортонормированный базисы.

4. Аналитическая геометрия на плоскости. Декартовы системы координат, их классификация и преобразования. Полярная система координат. Связь декартовой системы координат с полярной. Вычисление площади треугольника через координаты его вершин. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой в отрезках. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Нормальное уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку параллельно заданному вектору. Нахождение расстояния от точки до прямой. Сравнить понятия *отклонение* и *расстояние*. Нахождение расстояния между параллельными прямыми. Построение уравнения биссектрисы угла. Кривые второго порядка. Геометрические определения окружности, эллипса, гиперболы и параболы. Канонические уравнения кривых второго порядка: окружности, эллипса, гиперболы и параболы. Приведение алгебраического уравнения 2-го порядка к одному из канонических уравнений кривых второго порядка.

5. Аналитическая геометрия в пространстве. Вывод уравнений плоскостей: уравнение плоскости по двум векторам и точке, лежащим на этой плоскости, уравнение плоскости по трём заданным точкам, лежащим на этой плоскости, уравнение плоскости в отрезках, общее уравнение плоскости, нормальное уравнение плоскости. Неполные уравнения плоскости.

Построение уравнений прямой: уравнения прямой по двум заданным точкам, уравнение прямой по направляющему вектору и точке, параметрические уравнения прямой.

Поверхности второго порядка. Примеры канонических уравнений поверхностей 2-го порядка: сфера, эллипсоид, однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид, конус второго порядка. Примеры канонических уравнений цилиндрических поверхностей второго порядка – уравнения эллиптического параболоидного и гиперболического цилиндров.

6. Алгебра комплексных чисел. Алгебраическая форма и арифметические действия. Сопряжённые числа их свойства. Графический образ. Тригонометрическая форма. Арифметические действия в тригонометрической форме. Возведение в степень. Формула Муавра и извлечение корня в тригонометрической форме. Формула Эйлера, показательная форма, возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа в показательной форме.

7. Алгебра многочленов и дробно-рациональные выражения. Определение многочлена (полинома). Равенство многочленов. Нулевой многочлен. Единичный многочлен. Линейные операции с многочленами. Операция умножения многочленов. Корни многочленов. Кратность корня. Разложение многочленов на множители в множестве комплексных чисел и в множестве действительных чисел. Теорема Безу. Обобщённая теорема Виета.

Дробно-рациональные выражения. Правильные дроби. Неправильные дроби. Простейшие дроби. Разложение дробей на простейшие. Преобразование неправильных дробей в сумму многочлена и правильной дроби.

8. Матричная алгебра. Определение матрицы. Линейные операции с матрицами и их свойства. Операция умножения матриц и свойства этой операции. Линейная независимость строк (столбцов). Ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы.

Эквивалентные матрицы. Вычисление ранга матрицы с помощью приведения матрицы к трапецевидному или треугольному виду.

Квадратные матрицы. Числовая характеристика-определитель квадратной матрицы.

Диагональные матрицы. Единичные матрицы. Треугольные матрицы. Симметричные матрицы. Обратная матрица. Решение матричных уравнений. Преобразования базисов с помощью матриц.

9. Линейные алгебраические системы. Расширенная матрица системы. Матрица системы. Теорема Кронекера – Капелли и следствия из неё. Решение системы методом Гаусса с выбором главного элемента. Описать алгоритм этого метода (прямой ход и обратный ход). Совместность и несовместность системы. Разобрать случай отсутствия решения, случай единственности, решения, случай бесчисленного множества решений. Построение фундаментальной системы решений. Решение системы с различными правыми частями. Системы с трёхдиагональными матрицами и метод решения таких систем – метод трёхдиагональной прогонки. Однородные системы. Тривиальное решение. Построение фундаментальной системы решений.

10. Задача на собственные значения. Постановка задачи. Собственные числа и собственные векторы. Частичная проблема собственных чисел и полная проблема. Свойства собственных векторов. Собственные числа диагональных и треугольных матриц. Алгоритм решения в простейших случаях (все собственные числа – разные действительные числа).

Перечень примеров к экзамену за первый семестр:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} .$$

1. Вычислите определитель

2. Даны векторы $AB = \alpha; 6; \beta$ и $BC = 2; -3; 5$. Найдите сумму $\alpha + \beta$, если точки A, B, C лежат на одной прямой.

3. Найдите скалярное произведение векторов $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, если угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} равен 150° , $\mathbf{a} = \sqrt{3}$, $\mathbf{b} = 2$.

4. Найдите сумму координат вектора $\mathbf{b} = x, y, z$, коллинеарного вектору $\mathbf{a} = 2; 1; -1$, если скалярное произведение $\mathbf{b}, \mathbf{a} = 3$.

5. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $A(-2; -3)$.

6. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 5)$ и отсекающей на оси ординат отрезок $b = 7$.

7. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $M(-3; -4)$ и параллельных осям координат.

8. Определите острый угол между прямыми $u = -3x + 7$ и $y = 2x + 1$.

9. Докажите, что прямые $4x - 6y + 7 = 0$ и $20x - 30y - 11 = 0$ параллельны.

10. Докажите, что прямые $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны.

11. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $M(-1; 3), N(2; 5)$.

12. Докажите, что прямые $3x - 2y + 1 = 0$ и $2x + 5y - 12 = 0$ пересекаются и найдите координаты точки пересечения.

13. Приведите уравнение к каноническому виду и установите вид этой кривой. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; -5)$ параллельно прямой $3x + 4y + 2 = 0$.

14. Приведите уравнение к каноническому виду и установите вид этой кривой

$$x^2 + 4y^2 + 8y + 3 = 0.$$

15. Приведите уравнение к каноническому виду и установите вид этой кривой

$$x^2 + 2y^2 - 4y + 4x = 0.$$

16. Приведите уравнение $x^2 - y^2 - 6x + 10 = 0$ к каноническому виду. Какая кривая 2-го порядка имеет такое уравнение?

17. Приведите уравнение $4y^2 + 8y - 2x - 1 = 0$ к каноническому виду. Какая кривая 2-го порядка имеет такое уравнение?

18. Даны две точки $A(1; 3; -2)$ и $B(7; -4; 4)$. Постройте уравнение плоскости, проходящей через точку B перпендикулярно отрезку AB .

19. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2; 7; 3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$.

20. Напишите уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точки $A(3; -2; 1)$ и $B(1; 4; 0)$.

21. Найдите угол, образованный прямыми

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2}, \quad \frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6}.$$

22. Составьте уравнения прямой, проходящей через точку $A(1; -1; 0)$ перпендикулярно плоскости

$$2x - 3y + 5z - 7 = 0.$$

23. Напишите уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно прямой

$$\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{-2}.$$

24. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A(4; -3; 1)$ параллельно прямой

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}, \quad \frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}.$$

25. На комплексной плоскости изобразите все точки, для которых верно неравенство $0 \leq \operatorname{Im} z < 1$.

26. На комплексной плоскости изобразите все точки, для которых верно неравенство $1 \leq |z+2| \leq 2$.

27. На комплексной плоскости изобразите все точки, для которых верно неравенство $|z| \geq 2$.

28. Разложите в правильную дробь $\frac{2x}{x^2-5x+6}$ на простейшие.

29. Разложите в правильную дробь $\frac{x+1}{x-1^2}$ на простейшие

30. Представьте неправильную дробь $\frac{5x^3}{x^3-4x}$ в виде суммы многочлена и правильной дроби. Полученную правильную дробь разложите на простейшие.

31. Представьте неправильную дробь $\frac{x^3+3}{x+1 \quad x-1}$ в виде суммы многочлена и правильной дроби. Полученную правильную дробь разложите на простейшие.

32. Решите систему методом Крамера

$$\begin{cases} 2x + z = 6, \\ 3x - 4y = -2, \\ 2y - z = 2. \end{cases}$$

33. Решите систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x + z = 6, \\ 3x - 4y = -2, \\ 2y - z = 2. \end{cases}$$

Перечень вопросов к экзамену за второй семестр.

1. Функции, классификация и свойства. Определение функции Способы задания функции. Виды аналитического задания функции: явный, неявный, параметрический. Основные свойства: область определения, чётность, нечётность, монотонность, корни, периодичность и период.

2. Теория пределов и техника вычисления. Непрерывность. Основные понятия и определения: окрестность точки, граничные и внутренние точки, предельные точки. Определение предела функции в точке (по Коши). Понятие бесконечного предела. Свойства предела. Единственность. Аддитивность. Однородность. Предел произведения. Предел отношения. Переход к пределу в неравенствах (свойство монотонности). Теорема о сжатой функции. Предел композиции функций.

Техника вычисления пределов. Виды неопределённостей и их раскрытие. Определение бесконечно малых и их сравнение. Свойства бесконечно малых. Список основных эквивалентных бесконечно малых. Основное свойство эквивалентных бесконечно малых. Определение бесконечно больших, их сравнение и свойства. Основное свойство эквивалентных бесконечно больших. Раскрытие неопределённостей с помощью эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших. Первый и второй замечательные пределы.

Непрерывность. Определение приращения аргумента и приращения функции. Односторонние пределы в точке: левосторонний и правосторонний. Три определения непрерывности функции в точке и их взаимосвязь. Операции над непрерывными функциями в точке: сложение, умножение, деление, композиция. Непрерывность функции в области. Односторонняя непрерывность.

Основные свойства функций непрерывных на отрезке. Две теоремы Вейерштрасса, теорема Коши, Теорема Больцано-Коши. Теорема о непрерывности обратной функции. Непрерывность элементарных функций.

Точки разрыва и их классификация. Разрывы первого рода, устранимые разрывы. Разрывы второго рода. Привести примеры графических образов разрывов первого и второго рода.

3. Производная, дифференциал, свойства и техника дифференцирования. Определение производной. Дифференцируемые функции, непрерывно дифференцируемые функции, гладкие функции. Знать основную таблицу производных элементарных функций. Основные свойства производных: аддитивность, однородность. Дифференцирование произведения и отношения функций. Дифференцирование композиции функций, обратных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование (два способа). Правило Лопиталья для нахождения предела отношения функций. Физический и геометрический смысл производной.

Дифференциал. Определение дифференциала функции и его геометрический смысл. Дифференциал аргумента. Основные свойства дифференциала: однородность, аддитивность. Дифференциал произведения. Выражение производной через дифференциалы.

4. Полное исследование функций с помощью пределов и производных

Асимптоты. Классификация асимптот. Определение наклонной асимптоты. Необходимое условие существования наклонных асимптот. Вычисление параметров наклонной асимптоты. Горизонтальные асимптоты. Вертикальные асимптоты. Необходимое условие существования вертикальных асимптот.

Нахождение интервалов монотонности функции с помощью производных. Определение точек экстремума. Стационарные точки дифференцируемых функций. Два достаточных условия существования точек максимума или минимума.

Наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой функции. Выпуклость графика функции вверх и вниз. Точки перегиба. Определение вида выпуклости и нахождение точек перегиба с помощью второй производной.

5. Неопределённый интеграл, свойства и техника интегрирования.

Основные понятия и определения: подынтегральная функция, подынтегральное выражение, переменная интегрирования. Знать основную таблицу интегралов. Связь между дифференцированием и интегрированием. Свойства неопределённых интегралов: однородность, аддитивность.

Техника интегрирования. Метод разложения, метод подстановки, интегрирование по частям (с выводом формулы). Интегрирование дробно-рациональных функций. Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

6. Определённый интеграл, свойства и способы вычисления. Построение интегральной суммы и определение определённого интеграла. Условия интегрируемости. Свойства: однородность, аддитивность по подынтегральной функции, аддитивность по области интегрирования, монотонность, теорема о среднем, сохранение знака, связь пределов интегрирования. Оценка значений интеграла.

Вычисление. Формула Ньютона - Лейбница. Метод подстановки, формула интегрирования по частям. Интегрирование чётных и нечётных функций по симметричному интервалу. Несобственные интегралы первого рода, их вычисление с помощью пределов.

Ортогональные системы функций. Определение. Примеры тригонометрических

систем ортогональных функций $\sin \frac{k\pi x}{l}, \cos \frac{k\pi x}{l}$ на отрезке $[-l, l]$, $\sin \frac{k\pi x}{l}, \cos \frac{k\pi x}{l}$ и $\sin \frac{k\pi x}{l}, \cos \frac{k\pi x}{l}$ на отрезке $[0, l]$.

7. Геометрическое приложение определённого интеграла. Вычисление площади плоских фигур. Вывод формулы вычисления длины плоской кривой. Вывод формулы вычисления объёма тела вращения.

8. Базовые понятия теории дифференциальных уравнений

Классификация уравнений: порядок, линейность, нелинейность, однородность, неоднородность, с постоянными коэффициентами и с переменными коэффициентами.

Классификация решений: общее решение, общий интеграл, частное решение, Простешие дифференциальные уравнения первого порядка и способы их решения. Уравнения с разделёнными переменными и уравнения с разделяющимися переменными. Решение линейного дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами методом Я.Бернулли. Решение уравнения И. Бернулли – нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами.

9. Дифференциальные уравнения 2-го порядка. Понятие линейной независимости двух функций. Построение общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами методом Эйлера. Связь количества произвольных постоянных с порядком уравнения.

Метод Эйлера. Выбор аналитического вида решения. Построение характеристического уравнения и нахождение его корней. Построение общего решения в зависимости от вида корней характеристического уравнения: разные действительные корни, корень одной кратности 2, комплексные корни, мнимые корни.

10. Решение задачи Коши. Постановка задачи. Связь порядка уравнения с количеством начальных условий. Решение задачи Коши для уравнений первого порядка и для уравнений второго порядка.

Перечень примеров к экзамену за второй семестр:

1. Вычислите предел с помощью эквивалентных бесконечно малых

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 10x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln 1 + 9x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{x \sin 3x}$$

2. Вычислите предел с помощью эквивалентных бесконечно больших

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^7 + x^5}{12x^5 + x^2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 - x}{15x^3 + x^2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^5 + x^4 - 13}{4x^7 - 6 + 25}$$

3. Вычислите предел с помощью 2-го замечательного предела

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x}^x \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln a + x - \ln a}{x}$$

4. Найдите односторонние пределы функций в заданной точке

$$x_0 = \pi, \quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < \pi, \\ x, & x \geq \pi. \end{cases} \quad x_0 = 1, \quad f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x < 1, \\ x - 2, & x \geq 1. \end{cases}$$

5. Исследуйте функцию на непрерывность в заданной точке

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + x - 2} \text{ в точке } x_0 = 2. \quad f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} \text{ в точке } x_0 = 1.$$

6. Исследуйте функцию на непрерывность в заданной области

$$f(x) = \frac{1}{x-5} \frac{1}{x-1} \text{ на отрезке } 1; 5. \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 26x + 25} \text{ на отрезке } 1; 25.$$

7. Найдите точки разрыва функции и определите их род

$$f(x) = \frac{1}{x-5} \frac{1}{x-1}, \quad f(x) = \frac{x+1}{x+1}, \quad f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

8. Найдите производную функции

$$f(x) = \ln 5x^3 - x, \quad f(x) = \operatorname{arctg} \ln x, \quad f(x) = \ln^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$$

9. Найдите производную параметрически заданной функции

$$x = \frac{t+1}{t}, y = \frac{t-1}{t}, \quad x = t^3, y = 3t, \quad x = \cos^3 x, y = \sin^3 x.$$

10. Найдите производную функции с помощью логарифмического дифференцирования

$$f(x) = x^{\ln x}, \quad f(x) = \cos x^{\sin x}, \quad f(x) = x^x.$$

11. Найдите предел с помощью правила Лопиталья

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 15x}{\ln x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}.$$

12. Составьте уравнение касательной и нормали к графику функции $y = 2x^2 - 6x + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

13. В какой точке плоскости касательная к графику функции $y = \ln x$ параллельна прямой

$$y = 2x + 5?$$

14. Найдите угол, под которым пересекаются графики двух функций

$$y^2 = 2x \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = 8.$$

15. В каких точках плоскости касательная параболе, уравнение которой $y = -x^2 + 4x - 6$, наклонена к оси абсцисс под углом 45° или параллельна оси абсцисс?

16. Найдите дифференциал функции

$$y = \operatorname{arctg} \bar{x}, \quad y = x^2 \ln x, \quad y = x \operatorname{tg} x.$$

17. Исследуйте функцию на асимптоты

$$y = \frac{6x^3}{x^2 - 4}, \quad y = \frac{2x^2}{x + 1}, \quad y = \frac{x^3}{x + 1}.$$

18. Найдите интервалы возрастания и убывания функции

$$y = x^3 - 6x^2 + 5, \quad y = x - 2^2, \quad y = \ln x^2 - 2x + 4.$$

19. Найдите экстремумы функции

$$y = x^3 - 3x + 1, \quad y = e^{x^2 - 4x + 5}, \quad y = x - \operatorname{arctg} x.$$

20. Найдите точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз

$$y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5, \quad y = e^{-x^2}, \quad y = xe^{-x^2}.$$

21. Найдите интеграл с помощью интегрирования по частям

$$3x \sin 2x dx, \quad 3x e^{-x} dx, \quad \ln 7x dx.$$

22. Проинтегрируйте дробно рациональную функцию

$$\frac{x}{x^2 - 4} dx, \quad \frac{x}{x + 3} dx, \quad \frac{x}{x^2 - 5x + 6} dx.$$

23. Возьмите интеграл от тригонометрической функции

$$\sin 3x \sin 2x dx, \quad \sin 3x \cos 2x dx, \quad \sin^2 x dx, \quad \cos 3x \cos 2x dx, \quad \cos^2 x dx.$$

24. Вычислите определённый интеграл

$$\int_0^1 x e^{-x} dx, \quad \int_0^1 \ln(x + 3) dx, \quad \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

25. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения с разделёнными переменными и решение с начальным условием $y(1) = 1$.

$$x dx = y + 1 dy, \quad x dx + y dy = 0.$$

26. Найдите общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными и решение с начальным условием $y(1) = 1$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \quad 1 + y^2 \quad x = y \quad 1 + x^2 \quad dy.$$

Перечень вопросов к экзамену за третий семестр.

1. Числовые ряды. Введение понятий: числовой ряд, общий член ряда, частичная сумма, остаток ряда, сходимость ряда, расходимость ряда. Необходимое условие сходимости ряда и достаточное условие расходимости ряда. Два необходимых и достаточных условия сходимости числового ряда. Линейные операции над сходящимися рядами: умножение ряда на число и сложение рядов.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами: первый признак сравнения, второй признак сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши. Исследование на сходимость гармонического ряда и обобщённых гармонических рядов с помощью интегрального признака Коши.

Исследование на сходимость геометрических рядов (рядов геометрической прогрессии). Знакопередающиеся ряды. Теорема Лейбница и ряды Лейбница. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

2. Функциональные ряды и их приложение. Интервал сходимости ряда. Равномерная сходимость. Свойства равномерно сходящихся рядов: непрерывность суммы, интегрирование и дифференцирование рядов.

Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Вывод формулы для нахождения радиуса сходимости с помощью признака Даламбера или интегрального признака Коши. Равномерная сходимость степенных рядов на отрезке.

Ряд Тейлора. Разложение бесконечно дифференцируемой функции в ряд Тейлора. Условие сходимости ряда. Единственность разложения функции в ряд. Разложение простейших элементарных функций в ряд Тейлора. Ряд Маклорена.

Многочлены Тейлора и Маклорена. Приближённые вычисления значений функций, производных и интегралов с помощью многочленов Тейлора и Маклорена. Вывод формул разностной аппроксимации первой и второй производных с помощью многочлена Тейлора.

Тригонометрический ряд Фурье. Разложение функции по бесконечному ортогональному тригонометрическому базису. Построение коэффициентов Фурье. Тригонометрический ряд для чётных и нечётных функций.

3. Базовые понятия для функций нескольких переменных. Построение области определения для функции двух переменных и геометрический образ таких функций.

Частные производные и дифференциалы. Определение частных производных первого и второго порядков. Условие равенства вторых смешанных производных для функции двух переменных. Частные производные и частные дифференциалы, полный дифференциал. Дифференциал второго порядка. Производная композиции функций (полная производная). Дифференцирование неявно заданных функций. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.

4. Элементы теории поля. Скалярное поле и векторное поле. Определение производной по направлению.

Определения дифференциальных операций первого порядка. Градиент и его основные свойства. Связь градиента и производной по направлению. Дивергенция (расходимость) векторного поля. Ротор (вихрь) векторного поля. Дифференциальные операции второго порядка: дивергенция от градиента, ротор от градиента, дивергенция от ротора.

5. Экстремумы функций двух переменных. Необходимые условия экстремума. Многочлен Тейлора для функции двух переменных. Вывод необходимого и достаточного условий существования экстремума. Нахождение наибольших и наименьших значений функций двух переменных. Постановка задачи на нахождение условных экстре-

мумов. Решение задач на условный экстремум методом Лагранжа. Задача на условный экстремум для линейных функций (простейший случай симплекс метода).

7. Криволинейные интегралы. Построение криволинейного интеграла первого рода, его свойства. Вычисление интеграла в зависимости от вида аналитического задания пути интегрирования. Определение криволинейного интеграла второго рода, его свойства и зависимость интеграла от направления пути интегрирования. Способы вычисления. Интеграл 2-го рода по замкнутому пути. Условие независимости интеграла 2-го рода от вида пути. Выбор пути интегрирования, если подынтегральное выражение является полным дифференциалом и вычисление такого интеграла. Нахождение функции по полному дифференциалу. Решение уравнения в полных дифференциалах.

8. Двойные интегралы. Построение двойного интеграла как предела интегральных сумм. Свойства интеграла по площади. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат. Построение якобиана (определителя Якоби). Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат. Вычисление интеграла Пуассона с помощью двойного интеграла в полярной системе координат. Применение двойного интеграла для вычисления площадей и объёмов.

9. Тройные интегралы. Построение тройного интеграла как предела интегральных сумм. Свойства интеграла по объёму. Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат. Построение якобиана (определителя Якоби) для цилиндрической системы координат. Вычисление тройного интеграла в цилиндрической системе координат. Сферическая система координат и соответствующий якобиан. Применение тройного интеграла для вычисления объёмов.

Перечень примеров к экзамену за третий семестр:

1. Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Даламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

2. Исследуйте ряд на сходимость с помощью радикального признака Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n}$$

3. Исследуйте ряд на сходимость с помощью интегрального признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

4. Исследуйте ряд на абсолютную и условную сходимость (сходимость по Лейбницу).

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

5. Найдите радиус и область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n$$

6. Найдите область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^{n+1}$$

7. Разложить функцию $y = x + 1$ в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0; \pi]$.

8. Найдите полный дифференциал 1-го порядка от функции

$$z = \ln 3x + 2y. \quad 2. \quad z = xy.$$

9. Найдите полную производную $\frac{dz}{dt}$ по переменной t от функции

$$z = ye^{-2x}, \text{ где } x = 2t + 2, \quad y = \sin t. \quad z = x \tan 3y, \text{ где } x = t^2, \quad y = 2t^3.$$

10. Найдите производную скалярного поля $v = 2xy + 3yz + 5zx$ по заданному направлению вектора $\mathbf{a} = 12; 3; 4$ в точке $B 1; 2; 5$.

11. Найдите производную $\frac{\partial v}{\partial e}$ скалярного поля $v = 2x^2y^3 + 5z$ по направлению вектора $\mathbf{a} = 1; 1; 1$.

12. Найдите градиент $grad z$ плоского скалярного поля $z = \ln 3x + 2y$ в точке $B 1; 2; 5$.

13. Найдите направление наибольшего роста функции $v = xy + yz + 5zx^2$ в точке $B 1; 2; 3$.

14. Найдите дивергенцию (расходимость) $div \mathbf{a}$ векторного поля

$$\mathbf{a} \ x, y, z = 2xy\mathbf{i} + 3xz\mathbf{j} + 7yz\mathbf{k} \text{ в точке } A \ 3; 1; 2.$$

15. Найдите дивергенцию от градиента $div grad w$, если $w = 3xy + 5yz^3$.

16. Постройте ротор (вихрь) $rot \mathbf{b}$ заданного векторного поля

$$\mathbf{b} \ x, y, z = 2xy\mathbf{i} + 3xz\mathbf{j} + 7yz\mathbf{k}. \quad \mathbf{b} \ x, y, z = grad \ xy + yz + 5zx^2.$$

17. Найдите пределы интегрирования двойного интеграла, если область интегрирования это треугольник со сторонами $x = 0, y = 0, x + y = 2$.

18. Найдите пределы интегрирования двойного интеграла, если область интегрирования описана системой неравенств

$$\begin{aligned} x &\geq 0, \\ y &\geq 0, & y &\geq x^2, \\ x^2 + y^2 &\leq 1. & y &\leq 4 - x^2. \end{aligned}$$

19. Поменяйте порядок интегрирования

$$\int_0^1 \int_y^1 f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} f(x, y) dx dy = \int_1^2 \int_x^{2x} f(x, y) dx dy.$$

20. Вычислите интеграл

$$\int_2^4 dx \int_x^{2x} \frac{y}{x} dy, \quad \int_1^2 dy \int_0^{\ln y} e^x dx.$$

21. Вычислите интеграл

$$\int_D \cos x + y \ dx dy,$$

если область интегрирования ограничена прямыми $x = 0, y = \pi, y = x$.

6.3. Балльно-рейтинговая система оценивания

Таблица 7.

Распределение баллов по видам учебной работы в каждом семестре

Вид учебной работы, за которую ставятся баллы	Баллы
Посещение лекционных занятий	0-10
Итоговый опрос №1	0-15
Итоговый опрос №2	0-15
Итоговый опрос №3	0-15
Итоговый опрос №4	0-15
Промежуточная аттестация	0-30
ИТОГО	0-100

Таблица 8.

Распределение дополнительных баллов

Дополнительные баллы (баллы, которые могут быть добавлены до 100)	Баллы
Активность на учебных занятиях	0-5
Участие в Олимпиаде	0-10
ИТОГО	0-15

Минимальное количество баллов для допуска до промежуточной аттестации составляет 40 баллов при условии выполнения всех видов текущего контроля.

Таблица 9.

Балльная шкала итоговой оценки на экзамене

Оценка	Баллы
Отлично	85-100
Хорошо	65-84
Удовлетворительно	40-64
Неудовлетворительно	0-39

7. Методические рекомендации для обучающихся по освоению дисциплины

Методические рекомендации ко всем видам аудиторных занятий, а также методические рекомендации по организации самостоятельной работы, в том числе по подготовке к текущему контролю и промежуточной аттестации, представлены в Методических рекомендациях для обучающихся по освоению дисциплины «Математика».

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

8.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

Основная литература

1. Г.И. Беликова, Е. А. Бровкина, Л. В.Витковская. Высшая алгебра. Учебное пособие.— Спб.:РГГМУ,2021.— 170 с. с илл.
2. Г.И. Беликова, Л. В.Витковская. Математика. Часть 3. Основы математического анализа. Учебное пособие.— Спб.:РГГМУ,2015.—208 с. с илл.
3. Г.И. Беликова, Е. А. Бровкина, Л. В.Витковская. Дифференциальные уравнения. Учебное пособие.— Спб.:РГГМУ,2020.— 162 с. с илл.
4. И. И . Баврин. Высшая математика. Учебник. — М.:Издательский центр «Академия»,2005.— 616 с. с илл.

Дополнительная литература

1. И. М. Аксененкова, О. А. Малыгина, Н. С. Чекалкина и др. Ряды. Интеграл Фурье и преобразование Фурье. Приложения. – М.: В Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.— 208 с.

2. В. Л. Файншмидт. Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких аргументов. СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 208 с.

3. М.Л. Краснов, А. И. Киселёв, Г. И. Макаренко и др. Вся высшая математика. Учебник. Т.2 – М.: Издательство ЛКИ, 2007. – 192 с.

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины

1. Аудитория для проведения лекционных и практических занятий и хорошие большие доски.

10. Особенности освоения дисциплины для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Обучение обучающихся с ограниченными возможностями здоровья при необходимости осуществляется на основе адаптированной рабочей программы с использованием специальных методов обучения и дидактических материалов, составленных с учетом особенностей психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья таких обучающихся (обучающегося).

При определении формы проведения занятий с обучающимся-инвалидом учитываются рекомендации, содержащиеся в индивидуальной программе реабилитации инвалида, относительно рекомендованных условий и видов труда.

При необходимости для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья создаются специальные рабочие места с учетом нарушенных функций и ограничений жизнедеятельности.

11. Возможность применения электронного обучения и дистанционных образовательных технологий

Дисциплина может реализовываться с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий.

Рассмотрено и рекомендовано к использованию в учебном процессе на 2022/2023
учебный год без изменений.

Протокол заседания кафедры высшей математики и теоретической механики
от 15.06.2022 №11